УДК 517.983.23

А.В. ГЛУШАК

A.V. GLUSHAK

**ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ-СТРУВЕ**

**THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE BESSEL-STRUVE EQUATION**

*Для абстрактного уравнения Бесселя-Струве рассмотрена задача Дирихле и доказаны достаточные условия её однозначной разрешимости.*

*Ключевые слова: абстрактное уравнение, граничная задача, однозначная разрешимость*

*For the abstract Bessel-Struve equation, the Dirichlet problem is considered and sufficient conditions for its unique solvability are proved.*

*Keywords: abstract equation, boundary value problem, unique solvability*

Пусть – замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве с плотной в нем областью определения . При рассмотрим уравнение Бесселя-Струве

. (1)

В работе [1] приводится обзор публикаций, относящихся к уравнению (1), и описан класс операторов , с которым при установлена равномерная корректность задачи Коши для этого уравнения с условиями

, . (2)

Класс представляет собой множество операторов, которые являются генераторами проинтегрированной косинус оператор-функции (ПКОФ) (определение ПКОФ см., например, в [1]), – множество генераторов косинус оператор-функции (КОФ) .

Граничные же задачи для уравнения (1) при (гиперболический случай), вообще говоря, не являются корректными, но необходимость решать некорректные задачи в настоящее время является общепризнанной (см. введение в [2] – [4] и имеющуюся в них обширную библиографию). Во второй главе монографии [2] исследована корректность общих краевых задач для дифференциально-операторного уравнения первого порядка и для абстрактного волнового уравнения (случай в уравнении (1)).

Многие некорректные задачи для дифференциально-операторных уравнений могут быть сведены к операторным уравнениям первого рода , и основная трудность состоит в установлении их разрешимости. В настоящей работе именно при в гиперболическом случае удается решить операторное уравнение первого рода и установить условия корректности граничной задачи Дирихле для уравнения Бесселя-Струве (1).

Будем искать решение

уравнения (1) при ,удовлетворяющее граничным условиям

. (3)

Как уже было отмечено, задача (1), (3), вообще говоря, не является корректной. Мы установим условия, налагаемые на оператор и элементы , обеспечивающие её однозначную разрешимость.

Пусть оператор . Из результатов работы [1] следует, что корректная постановка начальных условий для уравнения Бесселя-Струве (1) состоит в задании в точке начальных значений ( 2), при этом единственное решение задачи (1), (2) имеет вид

, , (4)

где операторная функция Бесселя (ОФБ) и операторная функция Струве (ОФС) определены соответственно равенствами

, (5)

, (6)

– гамма-функция, – сферическая функция Лежандра [5, с. 205], – ПКОФ.

Задача Дирихле (1), (3) может быть переформулирована как обратная задача нахождения функции и входящего в уравнение элемента , одновременно являющимся вторым начальным условием в (2), из уравнения

(7)

по начальному и финальному условиям из равенства (3). Подробный обзор работ по различным обратным задачам можно найти в [6].

Возвращаясь к рассматриваемой нами задаче (7), (3), отметим, что, учитывая представление (4), нам следует определить элемент из уравнения

. (8)

Доказывается, что уравнение (8) для нахождения элемента можно записать в виде

, (9)

где – модифицированная функция Струве [7, с. 655].

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1), (3) сводится к задаче о существовании у заданного левой частью уравнения (9) и продолженного по непрерывности на ограниченного оператора обратного оператора, определённого на некотором подмножестве из . Важную роль при этом будет играть целая функция

*,* (10)

используя которую, уравнение (9) запишем в виде

. (11)

Для установления разрешимости уравнения (11) на резольвенту оператора наложим дополнительное условие.

**Условие 1.** Каждый нуль , определяемой равенством (10) целой функции принадлежит резольвентному множеству и существует такое , что

.

Будем считать условие 1 выполненным. Поскольку каждый нуль функции принадлежит , то он принадлежит вместе с круговой окрестностью радиуса , границу которой, проходимую по часовой стрелке, обозначим .

**Условие 2.** При некотором , удовлетворяющем неравенству

,

абсолютно сходится ряд

**,** .

Отметим, что в общем случае распределение нулей функции нам не известно, но в частных случаях и нули функции вычисляются явно и тогда в качестве можно взять . В указанных частных случаях имеем:

*,*

*.*

**Теорема.** Пусть и выполнены условия 1 и 2. Если , то задача Дирихле (1), (3) имеет единственное решение.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Глушак А.В. Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя-Струве // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 7. – С. 891 – 905.

2. Иванов В.К. [Текст] / Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Физматлит, 1995.

3. Кабанихин С.И. Численный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения. [Текст] / Кабанихин С.И., Криворотько О.И. – Сиб. журн. индустр. матем. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 90 – 101.

4. Васильев В.И. Решение задачи Дирихле для уравнения колебаний струны методом сопряженных градиентов. [Текст] / Васильев В.И., Кардашевский А.М., Попов В.В. – Вестник СВФУ. – 2015. – Т. 12, № 2. – С. 43 – 50.

5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963.

6. Prilepko A.I. [Текст] / Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. – New York. Basel. Marcel Dekker, 2000.

7. Прудников А.П. [Текст] / Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986.

**Глушак Александр Васильевич**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород.

Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей математики.

Тел.: +7(4722) 30-21-76, E-mail: [Glushak@bsu.edu.ru](mailto:Glushak@bsu.edu.ru)